**Рекомендации по подготовке к школьному этапу Всероссийской олимпиады школьников в 2018-2019г.**

**Математика**

**Тематика заданий школьного этапа олимпиады**

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

**IV-V КЛАССЫ**

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Четность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

**Специальные олимпиадные темы.**

Числовые ребусы. Взвешивания, переливания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

**VI-VII КЛАССЫ**

**Числа и вычисления.**

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

**Уравнения.**

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

**Функции.**

Функция. График функции. Функции: *у* = *kx* , *у* = *kx* + *b*.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

**Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.**

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

**Специальные олимпиадные темы.**

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

**VIII-IХ КЛАССЫ**

**Числа и вычисления.**

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2*k*, 3, 5*k*, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

**Выражения и их преобразования.**

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

**Уравнения и неравенства.**

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

**Функции.**

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

**Планиметрия.**

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

**Специальные олимпиадные темы.**

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

**Х-ХI КЛАССЫ**

**Числа и вычисления.**

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2*k*, 3, 5*k*, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число . 

**Выражения и их преобразования.**

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень *n*-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

**Тригонометрия**.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

**Уравнения и неравенства.**

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

**Функции.**

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства,

**Специальные олимпиадные темы.**

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

**Типовые задания школьного этапа олимпиады**

Ниже приведены примеры типовых задач школьного этапа олимпиады с указанием примерной сложности для соответствующего класса. Задания разбиты по основным темам.

**Арифметика, числовые ребусы**

**(4-5 класс, средняя).** Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: \*\* + \*\* + \*\*= 296.

**Ответ.** 99+99+98=296.

**(4-6 класс, легкая).** Найдите решение числового ребуса *AAA*–*AA*–*A*=*B*. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

**Ответ.** 111–11–1=99.

**(5-6 класс, средняя).** Расставьте скобки в выражении 1 : 2 : 3 : 4 : 5 = 30 так, чтобы получилось верное равенство.

**Ответ.** 1:(2:3:4:5)=30.

**(7-8 класс, легкая).** Расставьте скобки в левой части выражения 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5 так, чтобы получилось верное равенство.

**Ответ.** (2:3):((4:5):6)=5.

**(7-8 класс, сложная).** Сколько решений имеет ребус ? CBAC AC C ABBB=  

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

**Ответ.** 8 решений.

**Решение.** Заметим, что цифры и – ненулевые. Вычтем из обоих частей равенства . Получим . Поскольку первая цифра числа равна , это возможно только в случае, когда . Получим , откуда . Это возможно только при . Итак, и . Подставим эти значения в условие: . Это равенство выполняется при любых . Однако разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому и . Осталось 8 возможностей для . Значит, ребус имеет 8 решений. A C AC 00 = CBC ABBB 00 CBC 1=A 00000= 00 = 000= 1BCCBC BBBCC BBB  00 = BC BBB0 = B 1 =A 0 = B C CC C 01= 11000C 0  C 1C C

**(8 класс, средняя).** Число, состоящее из *N* цифр 8 (других цифр в числе нет), умножили на число 8. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную 1200. Найдите *N*.

**Ответ.** 1191.

**Решение.** Перемножив числа в столбик, получим результат: 7111…11104. В этом числе *N*–2 единицы. А сумма его цифр равна , откуда *N*=1191. 7(2) 4 1200N  

**(8 класс, средняя).** Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 50 больше суммы его цифр.

**Ответ.** Например, 9811111.

**Разрезания**

**(4-6 класс, средняя).** Разрежьте угол на уголки из трех клеток

**Текстовые задачи**

**(4-5 класс, легкая).** На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 см2. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

**Ответ.** 18 см2.

**(6-7 класс, средняя).** Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

**Ответ.** 5 детей (3 брата и 2 сестры).

**Решение.** Пусть сестер в семье *x*. Тогда из ответа Пети следует, что братьев в семье *x*+1. Теперь из ответа Маши получаем уравнение *x*+1=3(*x*–1), откуда *x*=2.

**(5-7 класс, средняя).** У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

**Ответ.** Не может.

**Решение.** Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

**(5-7 класс, средняя).** В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

**Решение.** При первом взвешивании в одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: 12=6+6. Получили искомое количество гвоздей: 19=13+6.

**(5-7 класс, средняя).** На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины *a*. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины *b*. Во сколько раз *b* больше *a*?

**Ответ.** В 101 раз.

**Решение.** Обозначим длину промежутка за *x*. Сто точек делят отрезок длины *a* на 99 промежутков, а 10000 точек делят отрезок длины *b* на 9999 промежутков. Поэтому *a*=99*x*, *b*=9999*x* и *b*=101*a*.

**(6-7 класс, средняя).** К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

**Ответ.** 600.

**(7-8 класс, средняя).** Три ученика *A, B* и *C* участвовали в беге на 100 м. Когда *A* прибежал на финиш, *B* был позади него на 10 м, также, когда *B* финишировал, *C* был позади него на 10 м. На сколько метров на финише *A* опередил *C*?

**Ответ.** На 19 метров.

**Логические задачи**

**(6-7 класс, сложная).** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: "Мы все лжецы". Вася на это ему ответил: "Нет, только ты". Может ли Толя быть лжецом?

**Ответ.** Не может.

**Решение.** Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

**(5-6 класс, средняя).** К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

**Четность**

**(7-8 класс, сложная).** Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

**Ответ.** Не может.

**Решение.** Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на десяти кустах равно сумме пяти нечетных чисел, т.е. числу нечетному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.